

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

SEMAINE 7

Table des matières

1	A propos de la couverture	3
1.1	Couverture en Future	3
1.2	Multiplicité de la couverture	5
2	Modèle simple d'asset à volatilité implicite non constante	10
2.1	Modèle log-normal décalé (Displaced log-normal diffusion, 1983)	10
2.2	Modèle de Bachelier (1900)	12
2.3	Modèle de Merton (1976)	13
2.4	Pricing en Fourier (2001)	15

1 A propos de la couverture

1.1 Couverture en Future

Définition (contrat Future). Contrat pour recevoir S_T en T .

- ▷ Echangé sur un marché organisé (Eurex, Euronext...) avec typiquement des maturités trimestrielles.
- ▷ Il y a des appels de marge tous les jours pour régler la variation de prix.
- ▷ Notation de prix : $\text{Fut}_t(\mathbf{S}_T, \mathbf{T})$

Propriété (Portefeuille autofinçant). : tout en liquidités + appels de marge :

$$dV_t = r_t V_t dt + \delta_t^F d\text{Fut}_t(S_T, T).$$



A comparer avec l'autofinancement avec un sous-jacent au comptant :

$$dV_t = r_t (V_t - \delta_t^S S_t) dt + \delta_t^S dS_t.$$

Comme V actualisé est $\mathbb{Q}$ -martingale, $(\text{Fut}_t(S_T, T) : 0 \leq t \leq T)$ est martingale et

$$\text{Fut}_t(S_T, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T \mid \mathcal{F}_t).$$

Hypothèse de taux d'intérêt déterministe :

$$\text{Fut}_t(S_T, T) = \frac{1}{B(t, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_s ds} S_T \mid \mathcal{F}_t \right) = F_t(S_T, T).$$

Propriétés.

▷ Prix Future et Prix Forward coïncident.

(propriété vraie encore si indépendance entre taux d'intérêt et S_T)

▷ Si S sans dividende, alors $\text{Fut}_t(S_T, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}$ et la volatilité de $\text{Fut.}(S_T, T)$ est la même que S

1.2 Multiplicité de la couverture



Mais unicité du prix.

Exemple. Marché du gaz : 36 contrats à terme ($T=1M, \dots, 36M$) mais en général, seulement 3 facteurs de risque identifiés.

▮► Redondance de la couverture

Questions :

- Quels sont les 3 contrats à choisir pour couvrir ? Critères de
 - Liquidité
 - Taille
- Comment identifier la couverture dans les 3 contrats ?

Mise en équation du problème de couverture multiple

- d actifs négociables, k Browniens $\widehat{W}$, avec $d > k$
- Matrice de volatilité σ_t de taille $d \times k$: $\text{rang}(\sigma_t) = k$
- Portefeuille de réplication :

$$\begin{aligned} dV_t &= \sum_{i=1}^d \delta_t^i dS_t^i + \dots = \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i \sigma_t^i d\widehat{W}_t + \dots \\ &= (\delta S)_t^\top \sigma_t d\widehat{W}_t + \dots \end{aligned}$$

Propriété. Si deux portefeuilles partent initialement du même prix et ont des deltas vérifiant

$$(\delta^{(1)} S)_t^\top \sigma_t = (\delta^{(2)} S)_t^\top \sigma_t,$$

alors les deux portefeuilles ont même valeur au cours du temps.

► Deux couvertures peuvent in fine répliquer le même portefeuille.

Exemple (Couverture d'une option avec une autre option et le sous-jacent).

Pour simplifier, pas de dividende : $V_t = v(t, S_t)$ et

$$dV_t = v'_S(t, S_t)dS_t + \dots dt.$$

Autre actif négociable écrit sur S (ex : option) : $C_t = C(t, S_t)$ et

$$dC_t = C'_S(t, S_t)dS_t + \dots dt.$$

Autre couverture : pour tout α_t ,

$$dV_t = v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)dS_t + \alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}dC_t + \dots dt,$$

s'interprète comme à la date t la détention de

- i) $v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)$ actifs S ,
- ii) $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}$ options C .

Réduction de la tracking-error par couverture en Delta-Gamma. En portefeuille pour la couverture : le sous-jacent S_t et une option $C_t = C(t, S_t)$.

Pour tout α_t : $d\mathbf{V}_t = \mathbf{v}'_S(t, \mathbf{S}_t)(1 - \alpha_t)d\mathbf{S}_t + \alpha_t \frac{\mathbf{v}'_S(t, \mathbf{S}_t)}{C'_S(t, \mathbf{S}_t)}d\mathbf{C}_t + \dots dt$.

Matching des Gammas de l'option et du portefeuille de couverture
(insensibilité aux variations d'ordre 2 en S)

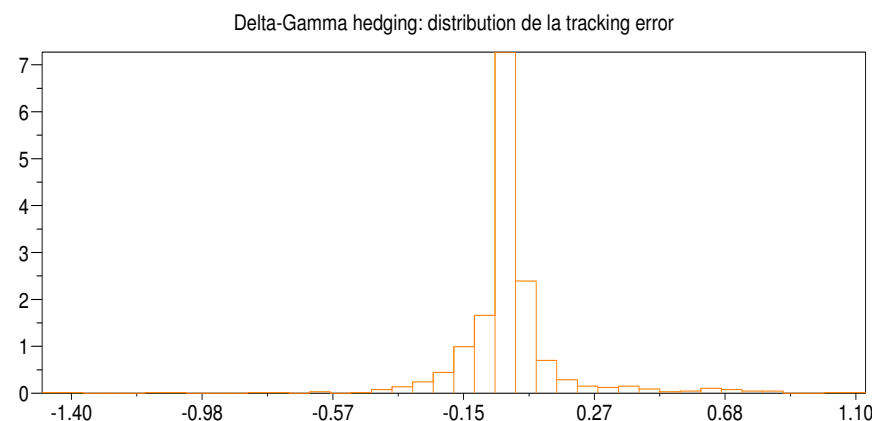
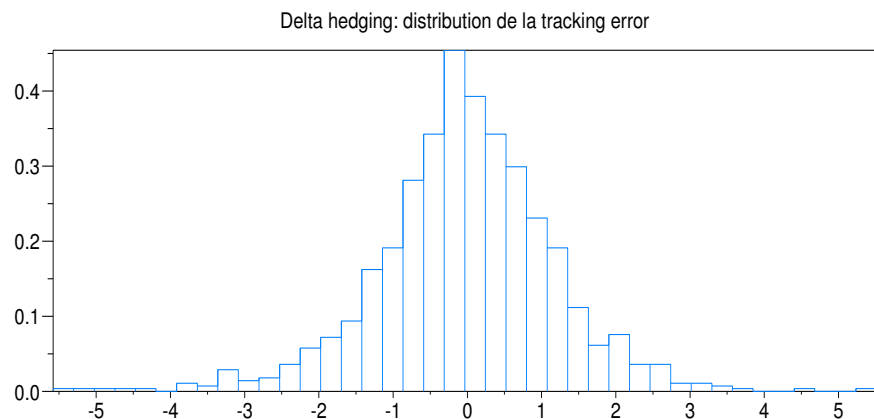
	option $V_t = v(t, S_t)$	portefeuille de couverture $\tilde{V}$
composition	$v'_S(t, S_t)$ titres S	$v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)$ actifs S et $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}$ actifs C
delta % S	$v'_S(t, S_t)$	$v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t) + \alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}C'_S(t, S_t)$
gamma % S	$v''_{SS}(t, S_t)$	$\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}C''_{SS}(t, S_t)$

⇒ Nombre d'options : $\alpha_t \frac{\mathbf{v}'_S(t, \mathbf{S}_t)}{C'_S(t, \mathbf{S}_t)} = \frac{\mathbf{v}''_{SS}(t, \mathbf{S}_t)}{C''_{SS}(t, \mathbf{S}_t)}$ = ratio des gammas.

Exemple. Option supplémentaire : Call (T_2, K) de maturité plus longue.

Paramètres : $T_1 = 12M$, $T_2 = 15M$, $K = 100$, $r = 2\%$, $\mu = 1\%$, $S_0 = 100$, $\sigma = 25\%$.

Pour un rebalancement hebdomadaire, distribution empirique des tracking errors :



Erreur quadratique

	hebdo.	quotid.
Δ hedging	1.25	0.566
$\Delta - \Gamma$ hedging	0.222	0.0567

Tracking error $\sim$

$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\text{pas trading}} \text{ si } \Delta \text{ hedge,} \\ \text{pas trading si } \Delta - \Gamma \text{ hedge.} \end{array} \right.$

2 Modèle simple d'asset à volatilité implicite non constante

2.1 Modèle log-normal décalé (Displaced log-normal diffusion, 1983)

Réf : Rubinstein '83

Définition. Taux d'intérêt nul $r = 0$, pas de dividende. Prix d'actif au temps T :

$$S_T = (S_0 + a) \exp(\sigma W_T - \frac{1}{2} \sigma^2 T) - a$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $S_0 + a > 0$. [Ecriture sous probabilité risque-neutre.](#)

Proposition.

- $S_T + a$ est lognormal
- la volatilité instantanée (vol spot) au temps t est $\sigma_t = \frac{S_t + a}{S_t} \sigma$ (= modèle à volatilité locale)
- $a > 0$: vol spot augmente quand $S \downarrow 0$ (typique d'equity/index)

Théorème (prix de call). Le prix de Call de strike K et maturité T dans le modèle DLN est donné par

$$C_0((S_T - K)_+; T) = \text{Call}^{\text{BS}}(0, S_0 + a; T, K + a).$$

Théorème (asymptotique des vols implicites). La volatilité implicite $\sigma_I(T, K)$ dans ce modèle a une valeur et une pente explicite à courte maturité et à la monnaie :

$$\begin{aligned} - \lim_{T \rightarrow 0} \sigma_I(T, K) \big|_{K=S_0} &= \frac{S_0 + a}{S_0} \sigma = \sigma_0 \\ - \lim_{T \rightarrow 0} \partial_K \sigma_I(T, K) \big|_{K=S_0} &= -\frac{a\sigma}{2S_0^2} = \frac{1}{2} \partial_{S_0} \sigma_0. \end{aligned}$$

Remarques.

- Calibration aisée de (σ, a) avec la vol. implicite ATM et sa pente
- Dans tout modèle à vol locale **[Berestycki et al 2002]** :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_I(T, Se^x)} = \int_0^1 \frac{du}{\sigma(0, Se^{xu})} \quad (\text{moyenne harmonique})$$

- Règle du 1/2 dans les modèles à volatilité locale

2.2 Modèle de Bachelier (1900)

Définition. $S_T = S_0 + \sigma W_T$. Modèle gaussien. Ecriture risque-neutre.

Théorème. Le prix de Call de strike K et maturité T dans le modèle de Bachelier est donné par

$$C_0^{\text{Bach.}}((S_T - K)_+; T) = (S_0 - K)\mathcal{N}\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\mathcal{N}'\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Remarques.

- Modèle outil pour approximation dans des modèles SABR (Hagan et al. '99) : si $F_t = F_t(S_T, T)$,

$$dF_t = \alpha_t F_t^\beta dW_t, \quad d\alpha_t = \nu \alpha_t dB_t, \quad \text{Cor}(W, B) = \rho.$$

- A la monnaie ($K = S_0$), les prix de Call dans Black-Scholes et Bachelier sont proches (si $\sigma^{\text{Bach.}} = S_0 \sigma^{\text{BS}}$) :

$$\frac{C_0^{\text{Bach.}} - C_0^{\text{BS}}}{C_0^{\text{Bach.}}} \leq \frac{T(\sigma^{\text{BS}})^2}{12}.$$

2.3 Modèle de Merton (1976)

Heuristique :

- Entre deux sauts, MB géométrique
- Au moment d'un saut, saut lognormal

Définition.

- Nombre de sauts : N processus de Poisson d'intensité λ , i.e. accroissements indépendants stationnaires avec

$$\mathbb{P}(\mathbf{N}_T = \mathbf{k}) = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k!}},$$

- Taille des sauts : $Y = (Y_i : i \geq 1)$ iid de loi lognormale telle que

$$\ln(\mathbf{1} + \mathbf{Y}_i) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{N}(\ln(\mathbf{1} + \mathbf{m}) - \alpha^2/2, \alpha^2)$$

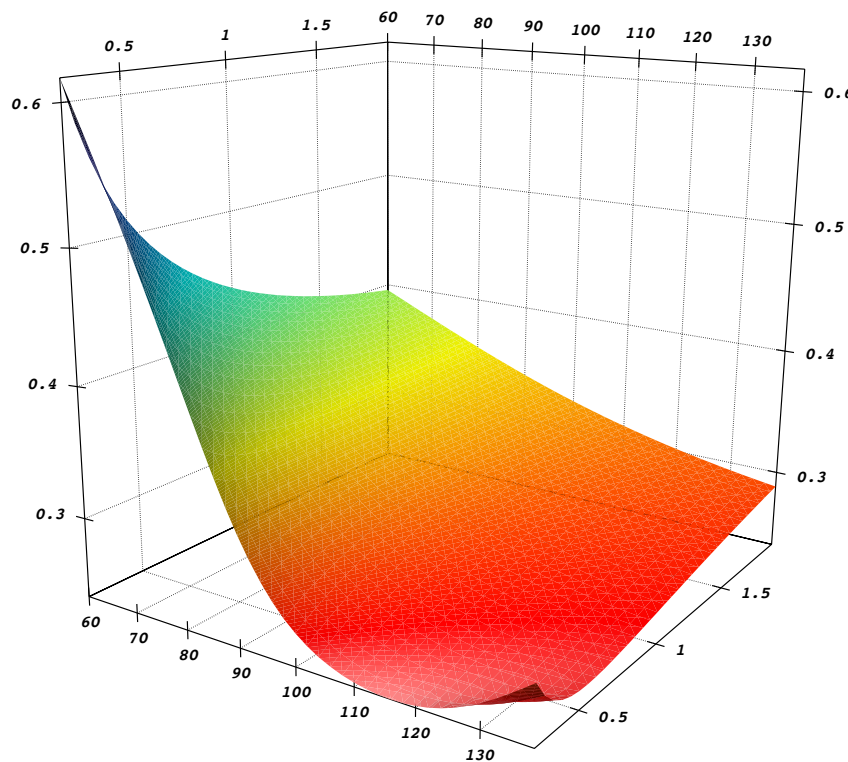
avec $m > -1$ et $\alpha \geq 0$. N , Y et W indépendants

- Modèle : $\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \mathbf{W}_T) \prod_{i=1}^{N_T} (\mathbf{1} + \mathbf{Y}_i)$

Proposition (contrainte martingale/risque neutre). $\mathbb{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ ssi $\mu = r - \lambda m$ (sous hypothèse d'absence de dividende).

Théorème (Formule de Merton).

$$\mathbb{E} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ \right] = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \text{Call}^{\text{BS}} \left(0, S_0(1 + m)^k e^{-m\lambda T}; T, K, \sigma_{\text{BS}}^2 = \sigma^2 + \frac{\alpha^2 k}{T} \right).$$



Vol implicite dans le
modèle de Merton

2.4 Pricing en Fourier (2001)

On suppose explicite la fonction caractéristique de $X_T = \ln(S_T e^{-rT})$:

$$\Phi(\mathbf{z}) := \mathbb{E}(e^{\mathbf{z} \mathbf{X}_T}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}.$$

S'applique aux modèles de Heston, Bates, modèle de Lévy, modèles affines...

Théorème (formule de Lewis '01).

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - K)_+] = S_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\frac{1}{2} - iu) \ln(K e^{-rT})}}{\frac{1}{4} + u^2} \Phi\left(\frac{1}{2} + iu\right) du.$$

Reste à faire une simple intégration numérique (quadrature, ...) : rapide, robuste.

Théorème (formule de Carr-Madan '98). Soit $0 < \alpha < p - 1$ où p est le nombre de moments finis de S_T :

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - K)_+] = e^{-\alpha k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iu \ln(K)}}{2\pi} e^{(iu + \alpha)rT} \frac{\Phi(iu + \alpha + 1)}{(iu + \alpha)(iu + \alpha + 1)} du.$$

Propice à du Fast Fourier Transform (utile si plusieurs strikes) ; choix du damping factor α délicat (impact sur la FFT).